第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0145-07

离散广义 Emden-Fowler 方程边值问题的多重解*

贺铁山[1]，陈文革[2]

(1- 仲恺农业工程学院计算科学学系，广州　510225;　2- 华南理工大学数学系，广州　510640)

摘　要: 本文研究了离散广义 Emden-Fowler 方程边值问题多重解的存在性。通过将这类边值问题的解转化为定义在一个适当空间上泛函的临界点，并利用 Morse 理论中的三临界点定理，文中得到了该问题存在 3 个解的充分条件，并举例说明了所获得的主要结果是有效的。

关键词: 离散广义 Emden-Fowler 方程；边值问题；多重解

分类号: AMS(2000) 39A11　　**中图分类号**: O175.7　　**文献标识码**: A

1　引言

Z, R 分别表示整数集与实数集。对于任意的 $a,b \in$ Z，$a \le b$，定义 $Z[a] = \{a, a+1, \cdots\}$，$Z[a,b] = \{a, a+1, \cdots, b\}$。

考虑由离散广义 Emden-Fowler 方程

$$\triangle\big[p(t)\triangle u(t-1)\big] + q(t)u(t) = f(t,u(t)), \quad t \in Z[1,k] \tag{1}$$

及边值条件

$$u(0) + \alpha u(1) = 0, \quad u(k+1) + \beta u(k) = 0 \tag{2}$$

组成的边值问题多重解的存在性，这里 k 是一个固定的正整数，$p : Z[1,k+1] \to$ R 并且对于任意的 $t \in Z[1,k+1]$，$p(t) > 0$，$q : Z[1,k] \to$ R，$f : Z[1,k] \times$ R $\to$ R 关于第二个变量连续，$\triangle$ 是前差分算子，定义为 $\triangle u(t) = u(t+1) - u(t)$，$\alpha$，$\beta$ 是常数。

方程 (1) 作为描述众多实际问题的数学模型，已广泛出现在计算机科学、控制理论、流体力学、核物理学等学科的研究中。很多作者进行了深刻的讨论，得到了一系列重要的结果。例如关于非共轭与非焦性的结果[1-3]，关于振动性与渐近性的结果[4-6]，关于周期解及次调和解的存在性与多重性的结果[7-12]。

最近，庾建设、郭志明[13,14] 利用鞍点定理得到了边值问题 (1)-(2) 一个解的存在性结果。然而，关于边值问题 (1)-(2) 三个解的存在性结果，据作者所知，并不多见。本文的主要目的是利用 Morse 理论中的三临界点定理建立边值问题 (1)-(2) 三个解的存在性准则。

收稿日期: 2008-07-07.　**作者简介**: 贺铁山 (1967年1月生)，男，硕士，副教授. 研究方向：非线性分析及其应用.
***基金项目**: 仲恺农业工程学院科研资助项目 (G3081724)；广州市科技计划项目 (2006J1-C0341).

2 变分结构与基本引理

设R^k是k维实Euclid空间。对于任意的$u,v\in\mathrm{R}^k$，$\|u\|$和(u,v)分别表示R^k中通常的范数与内积。对任意$u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in\mathrm{R}^k$，定义

$$\|u\|_p=\Big(\sum_{t=1}^{k}|u(t)|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

这里$\infty>p\geq 1$。那么

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\|u\|\leq\|u\|_p\leq k^{\frac{1}{p}}\|u\|. \tag{3}$$

令

$$F(t,x)=\int_0^x f(t,s)\mathrm{d}s,$$

$$c(t)=q(t)-p(t)-p(t+1),$$

$$M=\begin{pmatrix} c(1)-\alpha p(1) & p(2) & 0 & \cdots & 0 & 0\\ p(2) & c(2) & p(3) & \cdots & 0 & 0\\ 0 & p(3) & c(3) & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c(k-1) & p(k)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(k) & c(k)-\beta p(k+1)\end{pmatrix}.$$

现考虑定义在R^k上的如下泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}(Mu,u)-\sum_{t=1}^{k}F\big(t,u(t)\big),\quad \forall\, u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in\mathrm{R}^k. \tag{4}$$

由文献[14]知，$u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in\mathrm{R}^k$是泛函$J$的临界点当且仅当

$$u=\big\{u(t)\big\}_{t=0}^{t=k+1}=\big(u(0),u(1),u(2),\cdots,u(k),u(k+1)\big)^T$$

是边值问题(1)-(2)满足$u(0)=-\alpha u(1)$，$u(k+1)=-\beta u(k)$的解。由f的连续性可得，$J\in C^1(\mathrm{R}^k,\mathrm{R})$，并且

$$\big(J'(u),h\big)=(Mu,h)-\sum_{t=1}^{k}f\big(t,u(t)\big)\cdot h(t),\quad \forall\, u,h\in\mathrm{R}^k. \tag{5}$$

为证明本文的主要结果，需要下面的引理。

引理2.1[15] 设E是实可分Hilbert空间，$J\in C^2(E,\mathrm{R})$满足P.S.条件，有下界，又设J有一个非退化的、非极小、具有穷Morse指数的临界点x_0，则J至少有3个临界点。

3　3个解的存在性

令

$$\mu=\max\big\{|\alpha|,|\beta|\big\};$$

$$p_{\max}=\max\big\{|p(t)|,t\in Z[1,k+1]\big\};$$

$$q_{\max}=\max\big\{q(t),t\in Z[1,k]\big\},\quad q_{\min}=\min\big\{q(t),t\in Z[1,k]\big\}.$$

定理3.1　假设 f, M 满足下列条件。

(F_1)　对任意固定的 $t\in Z[1,k]$，$f(t,x)\in C^1(\mathrm{R},\mathrm{R})$，并且 $f(t,0)=0$；

(F_2)　对任意固定的 $t\in Z[1,k]$，当 $|x|\to\infty$ 时，$F(t,x)\to-\infty$；

(F_3)　$f'_x(t,0)>q_{\max}+\mu p_{\max}$ 或 $f'_x(t,0)<q_{\min}-(4+\mu)p_{\min}$，$t=1,2,\cdots,k$，并且至少存在一个正整数 $t_0\in Z[1,k]$，使得 $f'_x(t_0,0)>q_{\max}+\mu p_{\max}$；

(P_1)　矩阵 M 是半正定的。

则边值问题(1)-(2)至少存在3个解。

为证明定理3.1，我们先证明下面的引理。

引理3.1　假设定理3.1中的条件(F_2)、(P_1)成立，则由(4)式定义的泛函 $J(u)$ 满足P.S.条件，并且泛函 $J(u)$ 在 R^k 上有下界。

证明　假设 $\{u_m\}\subset\mathrm{R}^k$，存在常数 $C_1>0$，使得对任意的正整数 m，$|J(u_m)|\le C_1$，并且当 $m\to\infty$ 时，$J'(u_m)\to0$。若 $\{u_m\}$ 无界，则存在 $\{u_m\}$ 的子列(不妨仍记为 $\{u_m\}$)及 $t_0\in Z[1,k]$，使得 $|u_m(t_0)|\to\infty$。由条件(F_2)可得，当 $m\to\infty$ 时，$F(t_0,u_m(t_0))\to-\infty$。由 $F(t,x)$ 关于 x 的连续性及条件(F_2)可知，存在常数 $C_2>0$，使得对任意 $(t,x)\in Z[1,k]\times\mathrm{R}$，有

$$F(t,x)\le C_2.\tag{6}$$

由于 k 阶矩阵 M 是半正定的，所以对任意 $u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in\mathrm{R}^k$，$(Mu,u)\ge0$。由(6)式可得

$$J(u_m)\ge-\sum_{t=1}^{k}F\big(t,u_m(t)\big)\ge-F\big(t_0,u_m(t_0)\big)-(k-1)C_2.$$

因此，当 $m\to\infty$ 时，$J(u_m)\to+\infty$，这与 $|J(u_m)|\le C_1$ 矛盾。于是，$\{u_m\}$ 是有界的，从而 $\{u_m\}$ 有收敛子列，泛函 J 满足P.S.条件。

对任意 $u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in\mathrm{R}^k$，由(6)式可得

$$J(u)\ge-\sum_{t=1}^{k}F\big(t,u(t)\big)\ge-kC_2.$$

于是，泛函 J 在 R^k 上有下界。　　**证毕**

定理3.1的证明　由于泛函 J 在 R^k 上的临界点与边值问题(1)-(2)的解一一对应，因此我们只要利用引理2.1证明 J 在 R^k 上有3个临界点即可。由引理3.1知，泛函 J 满足P.S.条件且在 R^k 上有下界。下面证明 J 满足引理2.1的其它条件。

由条件 (F_1)、(5) 式及 Fréchet 微分的定义易知，$J(u)$ 是 R^k 上的 C^2 泛函，且

$$J''(u) = \begin{pmatrix} a_1 & p(2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p(2) & a_2 & p(3) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p(3) & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(k-1) & a_{k-1} & p(k) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p(k) & a_k \end{pmatrix}, \tag{7}$$

这里

$$a_1 = c(1) - \alpha p(1) - f'_x\big(1, u(1)\big); \quad a_t = c(t) - f'_x\big(t, u(t)\big), \quad t \in Z[2, k-1];$$

$$a_k = c(k) - \beta p(k+1) - f'_x\big(k, u(k)\big).$$

由 $f(t,0) = 0$，对任意的 $t \in Z[1,k]$ 及 (5) 式知，$\theta = (0,0,\cdots,0)^T$ 是泛函 J 的临界点。由条件 (F_3) 知，实对称矩阵 $J''(\theta)$ (见 (7) 式) 是严格对角占优矩阵。因此，$J''(\theta)$ 有有界逆。现证明 θ 非极小：对任意 $u \in R^k$，由 Taylor 公式，得

$$J(u) = J(\theta) + \big(J'(\theta), u\big) + \frac{1}{2}\big(J''(\rho u)u, u\big) = \frac{1}{2}\big(J''(\rho u)u, u\big), \tag{8}$$

这里 $0 < \rho < 1$。由条件 (F_3)，不妨设 $f'_x(1,0) > q_{\max} + \mu p_{\max}$，再由 $f'_x(t,x)$ 的连续性知，存在 $\delta > 0$，使当 $|x| < \delta$ 时，$f'_x(1,x) > q_{\max} + \mu p_{\max}$。取 $\xi_i = (\frac{\delta}{i}, 0, \cdots, 0)^T$，即 ξ_i 的第 1 个分量为 $\frac{\delta}{i}$，其他分量全为 0，这里 $i \in Z[1]$。由 (8) 式及 (7) 式知

$$\begin{aligned} J(\xi_i) &= \frac{1}{2}\big(J''(\rho\xi_i)\xi_i, \xi_i\big) = \frac{\delta^2}{2i^2}\Big[c(1) - \alpha p(1) - f'_x\Big(1, \frac{\rho\delta}{i}\Big)\Big] \\ &< \frac{\delta^2}{2i^2}\big(q(1) - p(1) - p(2) - \alpha p(1) - q_{\max} - \mu p_{\max}\big) \\ &< \frac{\delta^2}{2i^2}\big(q(1) - \alpha p(1) - q_{\max} - \mu p_{\max}\big) \le 0. \end{aligned}$$

注意到 $J(\theta) = 0$ 及 $\xi_i \to \theta (i \to \infty)$，由上式知，$\theta$ 非极小。又 R^k 是有限维空间，则 θ 的 Morse 指数为有穷。因此根据引理 2.1，泛函 $J(u)$ 至少有 3 个临界点。 **证毕**

定理 3.2 假设 f, M 满足 (F_1)、(F_3) 和下列条件：

(F_4) 对任意 $t \in Z[1,k]$，$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(t,x)}{x} = 0$；

(P_2) 矩阵 M 是正定的；

则边值问题 (1)-(2) 至少存在 3 个解。

证明 由于矩阵 M 是正定的，记其最小的正特征值为 λ_1，则对任意 $u \in R^k$，$(Mu, u) \ge \lambda_1\|u\|^2$。由条件 (F_4) 知，存在常数 $b > 0$，使得对任意 $(t,x) \in Z[1,k] \times R$，

$$|f(t,x)| \le \frac{1}{4}\lambda_1|x| + b.$$

于是，由中值定理及 Hölder 不等式，对任意 $u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in \mathrm{R}^k$，我们有

$$\begin{aligned} J(u) &\ge \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2-\sum_{t=1}^{k} f\big(t,\theta(t)u(t)\big)\cdot u(t)-\sum_{t=1}^{k}F(t,0)\\ &\ge \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2-\sum_{t=1}^{k}\Big(\frac{\lambda_1}{4}|u(t)|+b\Big)|u(t)|\\ &\ge \frac{\lambda_1}{4}\|u\|^2-b\sqrt{k}\|u\|, \end{aligned}$$

这里 $0<\theta(t)<1$, $t=1,2,\cdots,k$。由上式易知，泛函 $J(u)$ 满足 P.S. 条件且在 R^k 上有下界。剩下部分的证明完全类似于定理 3.1 的证明，不再赘述。　**证毕**

定理 3.3　假设 f, M 满足条件 (F_1)、(F_3)、(P_2) 和下列条件。

(F_5)　存在常数 $G>0$，使得当 $|x|\ge G$ 时，$xf(t,x)\le 0$;

则边值问题 (1)-(2) 至少存在 3 个解。

证明　由于实对称矩阵 M 是正定的，记其最小的正特征值为 λ_1，则对任意 $u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in \mathrm{R}^k$, $(Mu,u)\ge\lambda_1\|u\|^2$。由条件 (F_5)，得

$$F\big(t,u(t)\big)=\int_0^{u(t)} f(t,s)\mathrm{d}s\le \max\Big\{\int_0^G |f(t,s)|\mathrm{d}s,\int_0^G |f(t,-s)|\mathrm{d}s\Big\}.$$

记

$$c_0=\sum_{t=1}^{k}\max\Big\{\int_0^G |f(t,s)|\,\mathrm{d}s,\int_0^G |f(t,-s)|\,\mathrm{d}s\Big\},$$

于是

$$J(u)\ge \frac{\lambda_1}{2}\|u\|^2-c_0.$$

由上式易知，泛函 $J(u)$ 满足 P.S. 条件且在 R^k 上有下界。剩下部分的证明完全类似于定理 3.1 的证明，不再赘述。　**证毕**

定理 3.4　假设 f, M 满足条件 (F_1)、(F_3) 和下列条件。

(F_6)　存在常数 $b_1>0$, $b_2>0$, $\gamma>2$，使得对任意 $(t,x)\in Z\times \mathrm{R}$，有

$$F(t,x)\le -b_1|x|^\gamma+b_2,$$

则边值问题 (1)-(2) 至少存在 3 个解。

证明　设矩阵 M 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，令 $b_3=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_k|\}$，则对任意 $u=(u(1),u(2),\cdots,u(k))^T\in\mathrm{R}^k$，$(Mu,u)\ge -b_3\|u\|^2$。为验证 J 满足 P.S. 条件，假设 $\{u_m\}\subset \mathrm{R}^k$，存在常数 $C>0$，使得对任意的正整数 m, $|J(u_m)|\le C$，并且当 $m\to\infty$ 时，$J'(u_m)\to 0$。于是，由 (F_6) 及 (3) 式可得

$$\begin{aligned} C &\ge J(u_m)\ge -\frac{b_3}{2}\|u_m\|^2+\sum_{t=1}^{k}\big(b_1|u_m(t)|^\gamma-b_2\big)\\ &\ge -\frac{b_3}{2}\|u_m\|^2+b_1\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)^\gamma\|u_m\|^\gamma-kb_2. \end{aligned}$$

因为$\gamma > 2$，那么，$\{u_m\}$是有限维Hilbert空间R^k中的有界序列。显然，它有收敛的子序列。所以，泛函J满足P.S.条件且在R^k上有下界。剩下部分的证明完全类似于定理3.1的证明，不再赘述。 **证毕**

4 例子

下面举两个例子来说明本文的主要结果定理3.1与定理3.4。

例4.1 考虑离散广义Emden-Fowler方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t-1)+4u(t)=3^t\Big(-2u(t)\ln\big(1+u^2(t)\big)-\frac{2u^3(t)}{1+u^2(t)}+8u(t)\Big), & t\in Z[1,4], \\ u(0)+u(1)=0, \quad u(5)+u(4)=0. \end{cases} \tag{9}$$

这里

$$f(t,x)=3^t\Big(-2x\ln(1+x^2)-\frac{2x^3}{1+x^2}+8x\Big),\quad p(t)\equiv 1,\quad q(t)\equiv 4,\quad \alpha=\beta=1.$$

经过简单计算易知，四阶矩阵M有特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$，$\lambda_4=2$，则矩阵$M$是半正定的。易验证$f$, M满足定理3.1的所有条件。因此，边值问题(9)至少存在3个解。边值问题(9)不满足文献[13,14]中所有定理的条件，亦不满足本文其它定理的条件，从而得不到相应的结果。

例4.2 考虑离散广义Emden-Fowler方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u(t-1)+3u(t)=3^t\Big(-4u^3(t)\ln\big(1+u^2(t)\big)-\frac{2u^3(t)}{1+u^2(t)}+8u(t)\Big), & t\in Z[1,3], \\ u(0)+u(1)=0, \quad u(4)+u(3)=0. \end{cases} \tag{10}$$

经过简单计算知，矩阵M有特征值$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=2$，则M是齐异的与不定的。易验证f, M满足定理3.4的所有条件。因此，边值问题(10)至少存在3个解。边值问题(10)不满足文献[13,14]中所有定理的条件，亦不满足本文其它定理的条件，从而得不到相应的结果。

参考文献：

[1] Ahlbrandt C D. Dominant and recessive solutions of symmetric three term recurrences[J]. J Differential Equations, 1994, 107: 238-258
[2] Chen S Z. Disconjugacy, disfocality and oscillation of second order difference equations[J]. J Differential Equations, 1994, 107: 383-394
[3] Hartman P. Difference equations: disconjugacy, principal solutions, Green's functions, complete monotonicity[J]. Trans Amer Math Soc, 1978, 246: 1-30
[4] Chen S Z, Erbe L H. Oscillation and nonoscillation for systems of self-adjoint second-order difference equations[J]. SIAM J Math Anal, 1989, 20: 939-949
[5] Hooker J W, Kwong M K, Patula W T. Oscillatory second order linear difference equations and Riccati equations[J]. SIAM J Math Anal, 1987, 18: 54-63
[6] Cheng S S, Yan T C, Li H J. Oscillation of second order difference equations[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1991, 34: 223-239
[7] 郭志明，庾建设. 二阶超线性差分方程周期解与次调和解的存在性[J]. 中国科学(A辑)，2003, 33: 226-235
Guo Z M, Yu J S. Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order superlinear difference equations[J]. Science China Ser A, 2003, 33: 226-235

[8] Guo Z M, Yu J S. The existence of periodic and subharmonic solutions of subquadratic second order difference equations[J]. J London Math Soc, 2003, 68: 419-430
[9] Bin H H, Yu J S, Guo Z M. Nontrivial periodic solutions for asymptotically linear resonant difference problem[J]. J Math Anal Appl, 2006, 322: 477-488
[10] Yu J S, Guo Z M, Zou X F. Periodic solutions of second order self-adjoint difference equations[J]. J London Math Soc, 2005, 71: 146-160
[11] Xue Y F, Tang C L. Existence of a periodic solution for subquadratic second-order discrete Hamiltonian system[J]. Nonlinear Anal, 2007, 67: 2072-2080
[12] He T S, Chen W G. Periodic solutions of second order discrete convex systems involving the p-Laplacian[J]. Appl Math Comput, 2008, 206: 124-132
[13] 庾建设，郭志明. 离散广义 Emden-Fowler 方程的边值问题[J]. 中国科学 (A 辑)，2006, 36: 721-732
Yu J S, Guo Z M. Boundary value problems of generalized discrete Emden-Fowler equation[J]. Science China Ser A, 2006, 36: 721-732
[14] Yu J S, Guo Z M. On boundary value problems for a discrete generalized Emden-Fowler equation[J]. J Differential Equations, 2006, 231: 18-31
[15] 张恭庆. 临界点理论及应用[M]. 上海：上海科学技术出版社，1986
Zhang G Q. Critical Point Theory and its Applications[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1986

Multiple Solutions to Boundary Value Problems of the Generalized Discrete Emden-Fowler Equation

HE Tie-shan[1], CHEN Wen-ge[2]

(1- Department of Computation Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225; 2- Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640)

Abstract: In this paper, we investigate the existence of multiple solutions to boundary value problems of the generalized discrete Emden-Fowler equation. By converting solutions of the problems into the critical points of a functional defined on a proper space, some sufficient conditions for the existence of three solutions are obtained by using a three critical points theorem in the Morse theory. Two examples are given to illustrate the effectiveness of the obtained results.

Keywords: generalized discrete Emden-Fowler equation; boundary value problem; critical points

---

Received: 07 July 2008. **Accepted:** 26 Feb 2009.
Foundation item: The Science Foundation of Zhongkai University of Agriculture and Engineering (G3081724); the Science and Technology Plan Foundation of Guangzhou City (2006J1-C0341).